מבוא מתמטי לפיזיקה 1 — תרגול 6

מתרגל: אליאור אוריסמן

תוכן העניינים

1 מוטיבציה **2**

2 דפרנציאלים **2**

2.1 רקע 2

3 אינטגרלים **3**

3.1 רקע 3

3.1.1 הוכחה של אינטגרציה בחלקים 3

3.1.2 החלפת משתנים 3

3.1.3 השלמה לריבוע 4

3.1.4 שברים חלקיים 4

3.2 כללי אינטגרציה 5

3.3 נוסחאות שימושיות 5

3.4 דוגמאות 6

1 מוטיבציה

אינטגרלים מופיעים בשפע בפיזיקה. מעבר לטכניקה הבסיסית שנתרגל ונכיר, חשוב גם עם הזמן לפתח מיומנות ולקשר בין האינטגרל שמקבלים לפיזיקה שמתחבאת בבעיה הפיזיקלית. לדוגמה: יכולות להיות סימטריות מסוימות לאינטגרל שהן למעשה ריאליזציה של הסימטריות בבעיה הפיזיקלית. דוגמה נוספת: תחום ההגדרה לעיתים מספר משהו על הפתרון של הבעיה הפיזיקלית.

בתרגול זה נחזק 4 שיטות שהוצגו בהרצאה: אינטגרציה בחלקים, החלפת משתנים, השלמה לריבוע(החלפת משתנים ספציפית) ושברים חלקיים. לטכניקות האלו, כמו להצגה של האינטגרל, יש משמעות בבעיות פיזיקליות. החלפת משתנים לדוגמה יודעת לקחת בעיה פיזיקלית אחת ולהמיר אותה לבעיה פיזיקלית שנראת אחרת אבל מתנהגת דינמית באותה צורה!

2 דפרנציאלים

2.1 רקע

דיפרנציאל הוא השינוי בפונקציה כאשר הארגומנט x משתנה מעט. נתונה הפונקציה $y = f(x)$, כאשר נגזור נקבל

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \tag{2.1}$$

ולכן הדפרנציאל של y לפי x הוא : $dy = f'(x)\,dx$. ההבדל בין הדיפרנציאל לנגזרת כאן נובע בעיקר אם לדברים שנעסוק בהם יהיו יחידות. הנגזרת תמדוד קצב והדיפרנציאל ימדוד כמות שינוי.

דוגמאות :

- דפרנציאל של קבוע הוא 0 : $d(x+c) = dx + \cancelto{0}{dc}$.
- דפרנציאל של מכפלה :$d(uv) = vdu + vdu$.
- דפרנציאל של מנה : $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$.
- דפרנציאל של פונקציות מוכרות :

$$d\left(x^2\right) = 2xdx,$$
$$d(\sin x) = \cos x dx.$$

3 אינטגרלים

3.1 רקע

3.1.1 הוכחה של אינטגרציה בחלקים

נרצה להוכיח את הטענה הבאה:

$$\int udv = uv - \int vdu \tag{3.1}$$

נרשום דיפרנציאל של uv וניקח אינגטרל

$$\begin{aligned} d\left(uv\right) &= vdu + udv \\ \int d\left(uv\right) &= \int vdu + \int udv \end{aligned}$$

נעזרנו בזה ש-$\int d\left(x\right) = x$. לכן

$$\begin{aligned} uv &= \int vdu + \int udv \\ \int udv &= uv - \int vdu \end{aligned}$$

3.1.2 החלפת משתנים

הצבות שימושיות:

- אם מופיע ביטוי מהצורה: $\sqrt{1-x^2}$, העזרו ב- $x = \sin u$.
- אם מופיע ביטוי מהצורה $\sqrt{x^2-1}$, העזרו ב - $x = \frac{1}{\cos u}$.
- אם מופיע ביטוי מהצורה $\sqrt{x^2+1}$, העזרו ב- $x = \tan u$.
- אם מופיעה פונקציה של $f\left(\cos x, \sin x\right)$, העזרו ב- $u = \tan\left(x/2\right)$.

3.1.3 השלמה לריבוע

כאשר נתון ביטוי מהצורה x^2+bx+c , נגדיר החלפת משתנים ספציפית

$$u \equiv x+\frac{b}{2}. \tag{3.2}$$

ומה שנקבל הוא

$$\begin{aligned}
&=x^2+bx+c\\
&=\left(u-\frac{b}{2}\right)^2+b\left(u-\frac{b}{2}\right)+c\\
&=u^2-\cancel{ub}+\frac{b^2}{4}+\cancel{bu}-\frac{b^2}{2}+c\\
&=u^2+\left(c-\frac{b^2}{4}\right).
\end{aligned}$$

3.1.4 שברים חלקיים

אם אפשר לפרק את המכנה לגורמים לינאריים אז עבור כל גורם לינארי נקבל אינטגרל הבנוי מקבוע חלקי אותו הגורם, כלומר

$$\int\frac{dx}{(ax+b)(cx+d)}=\int\frac{Adx}{(ax+b)}+\int\frac{Bdx}{(cx+d)}. \tag{3.3}$$

מה שנרצה לעשות הוא לזהות מי הם A ו-B שעבורם הקשר מתקיים. אם קיימת חזקה , אז נפרק בנוסף עבור החזקה,

$$\int\frac{dx}{(ax+b)^2(cx+d)}=\int\left[\frac{A}{(ax+b)}+\frac{B}{(ax+b)^2}+\frac{C}{(cx+d)}\right]dx. \tag{3.4}$$

וניתן כמובן להכליל למקרה n

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(ax+b)^n(cx+d)^m}=&\frac{A_1}{(ax+b)^n}+\frac{A_2}{(ax+b)^{n-1}}+...\frac{A_n}{(ax+b)}\\
&+\frac{B_1}{(cx+d)^m}+...\frac{B_m}{(cx+d)}.
\end{aligned}$$

אם יש במכנה גורם ריבועי (עד כה ראינו רק גורם לינארי), נוכל לפרק לשני איברים לינאריים כאשר $ax^2 + bx + c$ מקיים ש $b^2 - 4ac > 0$. באופן כללי נרשום

$$\frac{1}{(ax^2+bx+c)^n(...)} = \frac{A_1x+B_1}{(ax^2+bx+c)^n} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} + ..\frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)} + ...$$

התנאי לפיתוחים שביצענו (אם בודקים מקרה אחר מקרה) הוא שמתקיים שהחזקה הגבוהה ביותר במונה קטנה מהחזקה הגבוהה ביותר במכנה. נסכם בטבלה עבור המקרים הפשוטים:

מכנה	ביטוי	צורה
איברים לינארים	$\frac{f(x)}{(ax+b)(cx+d)}$	$\frac{A}{ax+b} + \frac{B}{cx+d}$
חזקה של איברים לינארים	$\frac{g(x)}{(ax+b)^3}$	$\frac{A}{(ax+b)^3} + \frac{B}{(ax+b)^2} + \frac{C}{(ax+b)}$
איברים ריבועיים שלא ניתנים לפיקטור	$\frac{f(x)}{(ax^2+bx+c)(dx+e)}$	$\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)} + \frac{C}{dx+e}$

3.2 כללי אינטגרציה

- לינאריות - $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$
- הכפלה בקבוע $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$

3.3 נוסחאות שימושיות

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right|$$
$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)$$
$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$$

3.4 דוגמאות

שאלה 1

פתרו את האינטגרל הבא בעזרת אינטגרציה בחלקים

$$I = \int \ln\left(x^2+2\right) dx. \tag{3.5}$$

העזרו בעובדה ש-

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right). \tag{3.6}$$

נרצה להפתר מה- $\ln(\cdot)$ בעזרת אינטגרציה בחלקים

$$\begin{aligned} I &= \int \underbrace{\ln\left(x^2+2\right)}_{u} \underbrace{1dx}_{dv} \\ &= \underbrace{\ln\left(x^2+2\right)x}_{uv} - \int \underbrace{x}_{v} \underbrace{d\left(\ln\left(x^2+2\right)\right)}_{du}. \end{aligned}$$

נפתח בצד את הדפרנציאל

$$d\ln\left(x^2+2\right) = \frac{d\left(x^2\right)}{x^2+2} = \frac{2xdx}{x^2+2}. \tag{3.7}$$

ונציב בחזרה

$$\begin{aligned} I &= \ln\left(x^2+2\right)x - \int x\frac{2xdx}{x^2+2} \\ &= \ln\left(x^2+2\right)x - \int \frac{2x^2+4-4}{x^2+2} \\ &= \ln\left(x^2+2\right)x - 2\int \frac{x^2+2}{x^2+2}dx + \int \frac{4}{x^2+2}dx \\ &= \ln\left(x^2+2\right)x - 2\int dx + \int \frac{4}{x^2+2}dx \\ &= \ln\left(x^2+2\right)x - 2x + \frac{4}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C. \end{aligned}$$

כאשר בסוף הוספנו C כי מדובר באינטגרל לא מסוים. אם ניקח נגזרת לביטוי, נקבל בחזרה את האינטגרנד

$$\begin{aligned}
&=\frac{d}{dx}\left[\ln\left(x^2+2\right)x-2x+\frac{4}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+C\right]\\
&=\frac{2x^2}{x^2+2}+\ln\left(x^2+2\right)-2+\frac{4}{\left(x^2+2\right)}\\
&=\frac{2x^2+4}{x^2+2}+\ln\left(x^2+2\right)-2=\ln\left(x^2+2\right).
\end{aligned}$$

שאלה 2

פתרו את האינטגרל הבא

$$I=\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx. \tag{3.8}$$

הדרכה: ראשית הביאו לצורה "נוחה" יותר בעזרת החלפת משתנים ולאחר מכן פתרו בעזרת אינטגרציה בחלקים.

נראה אם אפשר להביא את האינטגרל להיות במונחי פונקציות טריגונומטריות שאינטגרציה עליהן אנחנו מכירים. נגדיר החלפה

$$\begin{aligned}
x&=\sin\left(u\right)\\
&\Rightarrow x^2=\sin^2\left(u\right)\\
&\Rightarrow dx=\cos\left(u\right)du
\end{aligned}$$

נציב לתוך I ונקבל

$$I=\int\frac{\sin^2\left(u\right)}{\sqrt{1-\sin^2\left(u\right)}}\cos\left(u\right)du.$$

ואכן, זה מקל על הבעיה מעט

$$I=\int\sin^2 u du. \tag{3.9}$$

קיבלנו הצגה קומפקטית במונחי המשתנה החדש. ננסה לפתור את את ההצגה החדשה של האינטגרל בעזרת אינטגרציה בחלקים

$$\begin{aligned}
I &= \int \sin^2 u du \\
&= \int \sin u \sin u du \\
&= \int \sin u d\left(-\cos u\right) \\
&= -\sin u \cos u + \int \cos^2 u du \\
&= -\sin u \cos u + \left[\int du - \int \sin^2 u du\right] \\
&= -\sin u \cos u + u - I \\
I &= \frac{-\sin u \cos u + u}{2} + C.
\end{aligned}$$

כאשר השתמשנו בזה ש-

$$\begin{aligned}
d\left(-\cos u\right) &= \sin u du, \\
\sin^2 u + \cos^2 u &= 1.
\end{aligned}$$

נותר להביע את הבעיה במונחי x ע"י הצבה בכיוון ההפוך, כלומר $u = \arcsin\left(x\right)$, נקבל

$$\begin{aligned}
I &= \frac{-\sin\left(\arcsin x\right)\cos\left(\arcsin x\right) + \arcsin x}{2} + C \\
&= \frac{-x\sqrt{1-x^2} + \arcsin\left(x\right)}{2} + C,
\end{aligned}$$

כאשר בשלב האחרון השתמשנו בקשר $\cos\left(\arcsin x\right) = \sqrt{1-x^2}$ ו- $\sin\left(\arcsin x\right) = x$.

תרגילון 1

הראו ש-

$$\cos\left(\arcsin x\right) = \sqrt{1-x^2}. \tag{3.10}$$

שאלה 3

פתרו את האינגרל בעזרת מעבר לפונקציות טירגונומטריות

$$I = \int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx. \tag{3.11}$$

ננסה את ההחלפה הבאה

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\cos u} \\ x^2 &= \frac{1}{\cos^2 u} \\ dx &= \frac{\sin u}{\cos^2 u}du \end{aligned}$$

נציב בחזרה באינטגרל

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{(1/\cos^2 u)\sqrt{(1/\cos^2 u)-1}}\frac{\sin u du}{\cos^2 u} \\ &= \frac{\sin u du}{\sqrt{\frac{1-\cos^2 u}{\cos^2 u}}} \\ &= \int \cos u dx = \sin u + C \end{aligned}$$

נותר לחזור למונחי x

$$\begin{aligned} I &= \sin\left(\text{arccos}\left(1/x\right)\right) + C \\ &= \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} + C \\ &= \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C \end{aligned}$$

כאשר השתמשנו כאן ב-$\sin\left(\arccos\left(x\right)\right) = \sqrt{1-x^2}$.

שאלה 4

פתרו את האינטגרל הבא

$$I = \int \frac{1}{\sin(x)} dx. \tag{3.12}$$

הדרכה: העזרו בהחלפת משתנים $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

ניעזר בהדרכה

$$t = \tan(x/2), \tag{3.13}$$

ובזהות

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}. \tag{3.14}$$

מכאן ש-

$$1 + t^2 = \frac{1}{\cos^2(x/2)}. \tag{3.15}$$

כדי להעזר צריך לדעת איך $\sin x$ נראה במונחי t

$$\begin{aligned}
dt &= \frac{dx}{2\cos^2(x/2)} = \frac{1+\tan^2(x/2)}{2} = \frac{1+t^2}{2}dx, \\
\cos x &= 2\cos^2(x/2) - 1 = 2\frac{1}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\
\sin x &= 2\sin(x/2)\cos(x/2) = 2\cos^2(x/2)\tan(x/2) = \frac{2t}{1+t^2}.
\end{aligned}$$

מכאן ש -

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{1}{\sin x} dx \\
&= \int \frac{1+t^2}{2t} \frac{2}{1+t^2} dt \\
&= \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C \\
&= \ln|\tan(x/2)| + C.
\end{aligned}$$

שאלה 5

פתרו את האינגרל בעזרת החלפת משתנים

$$I = \int \sin^3 x. \tag{3.16}$$

נפרק את האינטגרנד באופן הבא

$$\begin{aligned} I &= \int \sin^2 x \sin x dx \\ &= \int \left(1 - \cos^2 x\right) d\left(-\cos x\right). \end{aligned}$$

נגדיר משתנה חדש

$$\begin{aligned} u &= \cos x, \\ du &= d\cos x. \end{aligned}$$

נקבל ש-I במונחי האינטגרנד החדש הוא

$$\begin{aligned} I &= -\int \left(1 - u^2\right) du \\ &= -\left(u - \frac{1}{3}u^3\right) + C. \end{aligned}$$

כדי לחזר למונחי x, נעזר בקשר $u = \cos(x)$ ונקבל

$$I = -\left(\cos x - \frac{1}{3}\cos^3 x\right) + C. \tag{3.17}$$

שאלה 6

פתרו את האינגרל בעזרת החלפת משתנים

$$I = \int \frac{dx}{\sin^4(x)\cos^2(x)} \tag{3.18}$$

נבצע את החלפת המשתנים הבאה

$$\begin{aligned} u &= \tan x, \\ du &= \frac{dx}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

נעזר בזהות (בדקו!)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^4 x} &= \left(1 + \frac{1}{\tan^2 x}\right)^2 \\ &= \left(1 + \frac{1}{u^2}\right)^2. \end{aligned}$$

נציב בחזרה

$$\begin{aligned} I &= \int \left(1 + \frac{1}{u^2}\right)^2 du \\ &= \int \left(1 + \frac{2}{u^2} + \frac{1}{u^4}\right) du \\ &= u - \frac{2}{u} - \frac{1}{3u^3} + C. \end{aligned}$$

כאשר השתמשנו ב-

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \qquad n \neq 1. \tag{3.19}$$

במונחי הבעיה המקורית

$$I = \tan x - \frac{2}{\tan x} - \frac{1}{3\tan^3 x} + C. \tag{3.20}$$

שאלה 7

פתרו ע"י השלמה לריבוע

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)(3-x)}}. \tag{3.21}$$

העזרו בקשר

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right). \tag{3.22}$$

נרצה להביא לצורה של אינטגרל העזר. נפעיל השלמה לריבוע במכנה. קודם נרשום במפורש:

$$(x+2)(3-x) = -x^2 + x + 6. \tag{3.23}$$

ונעזר בנוסחה שאומרת ש-

$$x^2 + bx + c = u^2 + \left(c - b^2/4\right), \; dx = du \tag{3.24}$$

כאשר u הוא המשתנה החדש. נזהה $b = -1$ ו-$c = -6$, ונקבל

$$-\left(x^2 - x + 6\right) = \frac{25}{4} - u^2. \tag{3.25}$$

נציב לתוך I ונקבל

$$I = \int \frac{du}{\sqrt{\frac{25}{4} - u^2}} = \arcsin\left(\frac{u}{5/2}\right) = \arcsin\left(\frac{x - 1/2}{5/2}\right).$$

כאשר השתמשנו בקשר בבסיס החלפת המשתנים הזו : $u = x + \frac{b}{2} = x - \frac{1}{2}$.

שאלה 8

העזרו בשברים חלקיים כדי לפתור את האינטגרל הבא

$$I = \int \frac{x+13}{x^2 - 4x - 5} dx \tag{3.26}$$

ניקח את האינטגרל ונמצא ראשית את הפירוק לגורמים של המכנה

$$x^2 - 4x - 5 = (x-5)(x+1) \tag{3.27}$$

ונרשום

$$\int \frac{x+13}{(x-5)(x+1)}dx = \int \frac{A}{(x-5)}dx + \int \frac{B}{x+1}dx \tag{3.28}$$

נדרוש שהפירוק הבא מתקיים ונקבל משוואה

$$A(x+1) + B(x-5) = x + 13 \tag{3.29}$$

נסדר

$$x(A+B) + (A-5B) = 1 \cdot x + 13 \tag{3.30}$$

ונראה הדבר היחיד שיכול להתקיים הוא ש-

$$\begin{aligned} A + B &= 1 \\ A - 5B &= 13 \end{aligned}$$

(השוונו מקדמים של איבר חופשי ומקדם של x) נפתור ונקבל

$$A = 3, \qquad B = -2 \tag{3.31}$$

לכן

$$\int \frac{3}{x-5}dx - \int \frac{2}{x+1}dx = 3\ln|x-5| - 2\ln|x+1| + C. \tag{3.32}$$

שאלה 9

העזרו בשברים חלקיים כדי לפתור את האינטגרל הבא

$$I = \int \frac{1}{x^2 - 4} dx. \tag{3.33}$$

$$x^2 - 4 = (x+2)(x-2). \tag{3.34}$$

נרשום

$$\int \frac{dx}{x^2 - 4} = \int \frac{A}{x+2} + \int \frac{B}{x-2}. \tag{3.35}$$

נדרוש

$$A(x-2) + B(x+2) = 1. \tag{3.36}$$

נסדר

$$(A+B)x + 2(B-A) = 1. \tag{3.37}$$

ונקבל

$$\begin{aligned} A + B &= 0, \\ 2(B-A) &= 1. \end{aligned}$$

עם פתרון

$$A = -\frac{1}{4}, \qquad B = \frac{1}{4}. \tag{3.38}$$

וקיבלנו

$$\int \frac{-(1/4)\,dx}{x+2} + \int \frac{(1/4)\,dx}{x-2} = -\frac{1}{4}\ln|x+2| + \frac{1}{4}\ln|x-2| = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C. \tag{3.39}$$

שאלה 10

העזרו בשברים חלקיים כדי לפתור את האינטגרל הבא

$$I = \int \frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}dx. \tag{3.40}$$

העזרו באינטגרל

$$\int \frac{1}{x^2+1}dx = \arctan(x) + C. \tag{3.41}$$

נראה שניתן להשתמש בפירוק לשברים חלקיים מאחר ומתקיים שהחזקה הגבוהה ביותר היא במכנה. נתחיל מלבדוק את המכנה

$$x^4+3x^2+2 = \left(x^2+2\right)\left(x^2+1\right) \tag{3.42}$$

נרשום ונבצע פירוק באופן הבא

$$\frac{x^3+x^2+x+2}{(x^2+2)(x^2+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \tag{3.43}$$

ונקבל במונה

$$(Ax+B)\left(x^2+1\right) + (Cx+D)\left(x^2+2\right). \tag{3.44}$$

נסדר

$$(A+C)\,x^3 + (B+D)\,x^2 + (A+2C)\,x + B + 2D. \tag{3.45}$$

ונדרוש שיוון ל-x^3+x^2+x+2 . נקבל מערכת משוואות

$$\begin{aligned} A+C&=1,\\ B+D&=1,\\ A+2C&=1,\\ B+2D&=2. \end{aligned}$$

עם פתרון

$$C=0,\quad A=1,\quad D=1,\quad B=0. \tag{3.46}$$

נרשום

$$\int \frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}dx=\int \frac{x}{x^2+2}dx+\int \frac{1}{x^2+1}dx. \tag{3.47}$$

עבור האינטגרל הראשון נבצע החלפת משתנים $t=x^2$ עם $dx=2xdx$ ונקבל

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t+2}+\int \frac{1}{x^2+1}dx&=\frac{1}{2}\ln|t+2|+\arctan(x)+C\\ &=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2\right|+\arctan(x)+C \end{aligned}$$

כאשר השתמשנו ב-

$$\int \frac{1}{x^2+1}dx=\arctan(x)+C. \tag{3.48}$$